hipi math

Les nombres entiers

Chapitre 1

Les nombres entiers *(1 Ari 1)*

Les ensembles de nombres et leur notation *(1 Ari 110 2) (1 Ari 111 5)*

L'addition et la soustraction *(1 Ari 120 3) (1 Ari 121 4) (1 Ari 122 8)*

L'arrondissement et l'estimation *(1 Ari 131 12)*

La multiplication, la division et l'exponentiation *(1 Ari 141 4)*

La priorité des opérations *(1 Ari 151 6)*

Les propriétés des opérations *(1 Ari 161 18)*

Les multiples, les diviseurs *(1 Ari 171 3) (1 Ari 172 6)*

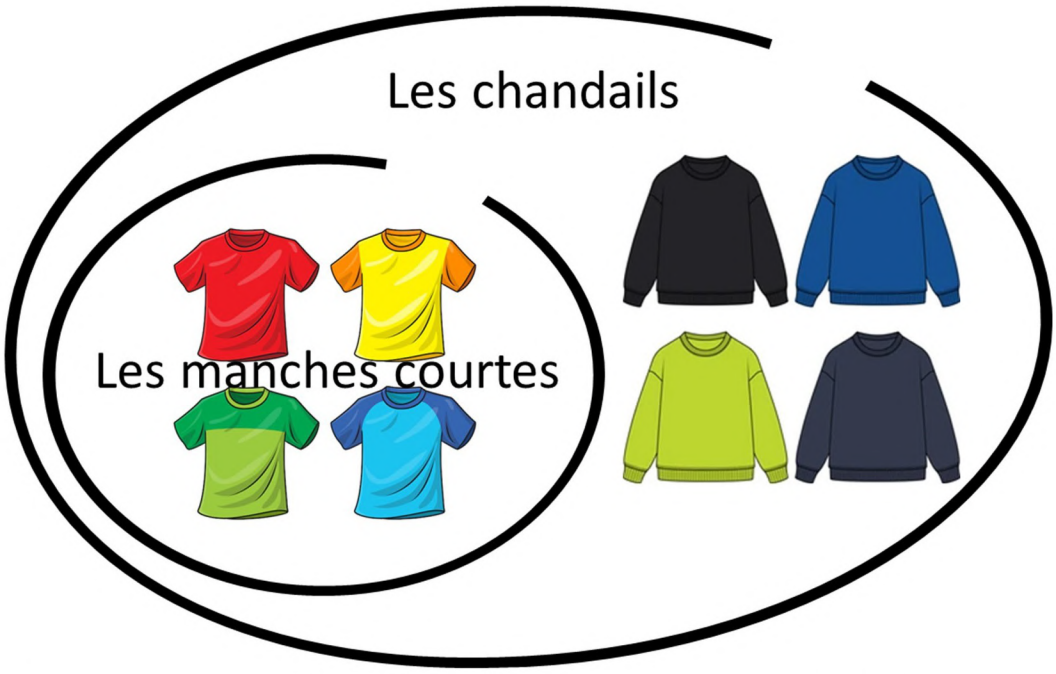
Le PGCD et le PPCM *(1 Ari 181 10)*

Problèmes *(1 Ari 1p1 12) (1 Ari 1p2 2) (1 Ari 1p3 6) (1 Ari 1p4 7) (1 Ari 1p5 8)*

Chaine d'opération *(1 Ari 1p6 2)*

Les ensembles de nombres

Comme pour les chandails, il y a plusieurs sortes de nombres.



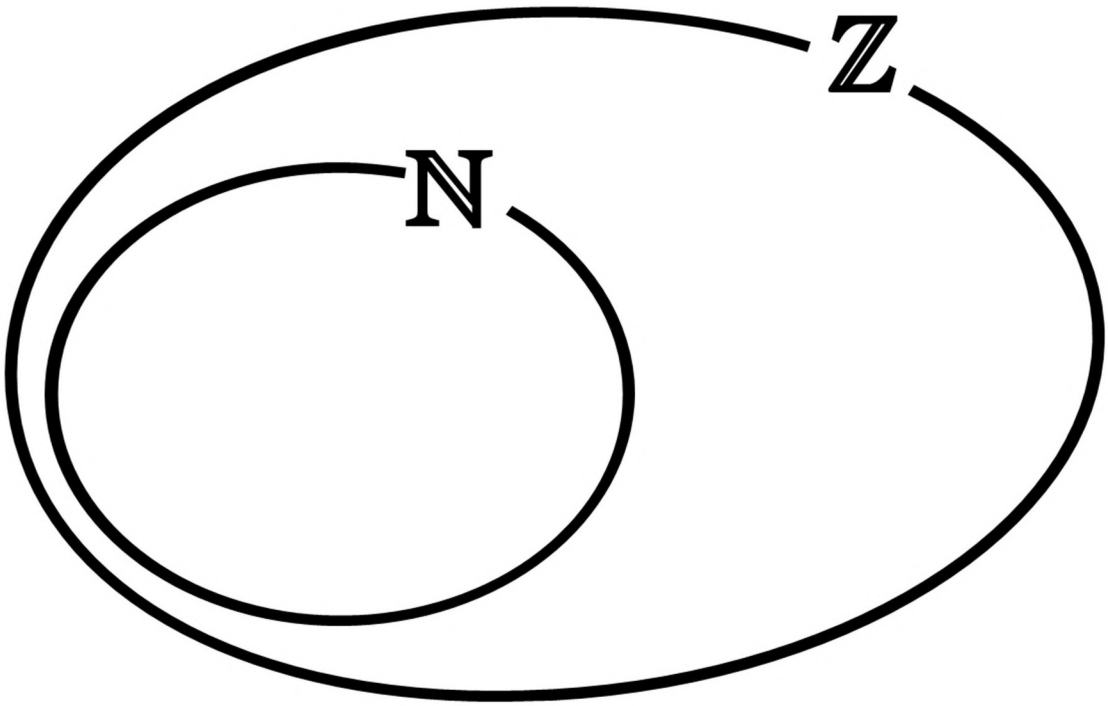
Il ne s'agit pas ici de tiroirs séparés, mais bien de compartiment à l'intérieur d'un plus grand.

Les manches courtes se retrouvent donc à l'intérieur des deux ensembles.

Il en sera de même pour les naturels, les nombres entiers positifs.

L'ensemble de tous les nombres entiers se nomme $\mathbb{Z}$.

L'ensemble de tous les entiers positifs se nomme $\mathbb{N}$.



Pour distinguer les entiers positifs, nous déterminons un compartiment à l'intérieur du plus grand, nommé l'ensemble $\mathbb{N}$.

La notation

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \cdots\}$ $\mathbb{Z}^* = \{\cdots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \cdots\}$

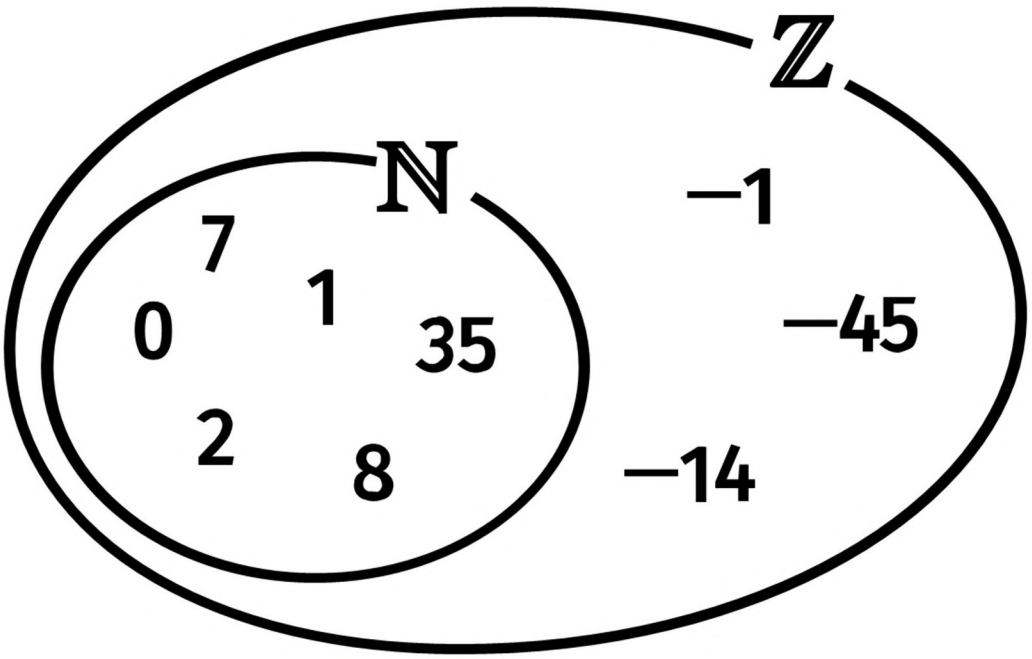
$\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}^*$, on remarque l'astérisque : c'est pour dire que l'ensemble exclu le 0.

$\mathbb{Z}_- = \{\cdots, -3, -2, -1, 0\}$ pour les négatifs et $\mathbb{Z}_+$ pour les positifs,
on remarquera que les entiers positifs correspondent aux nombres naturels.

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

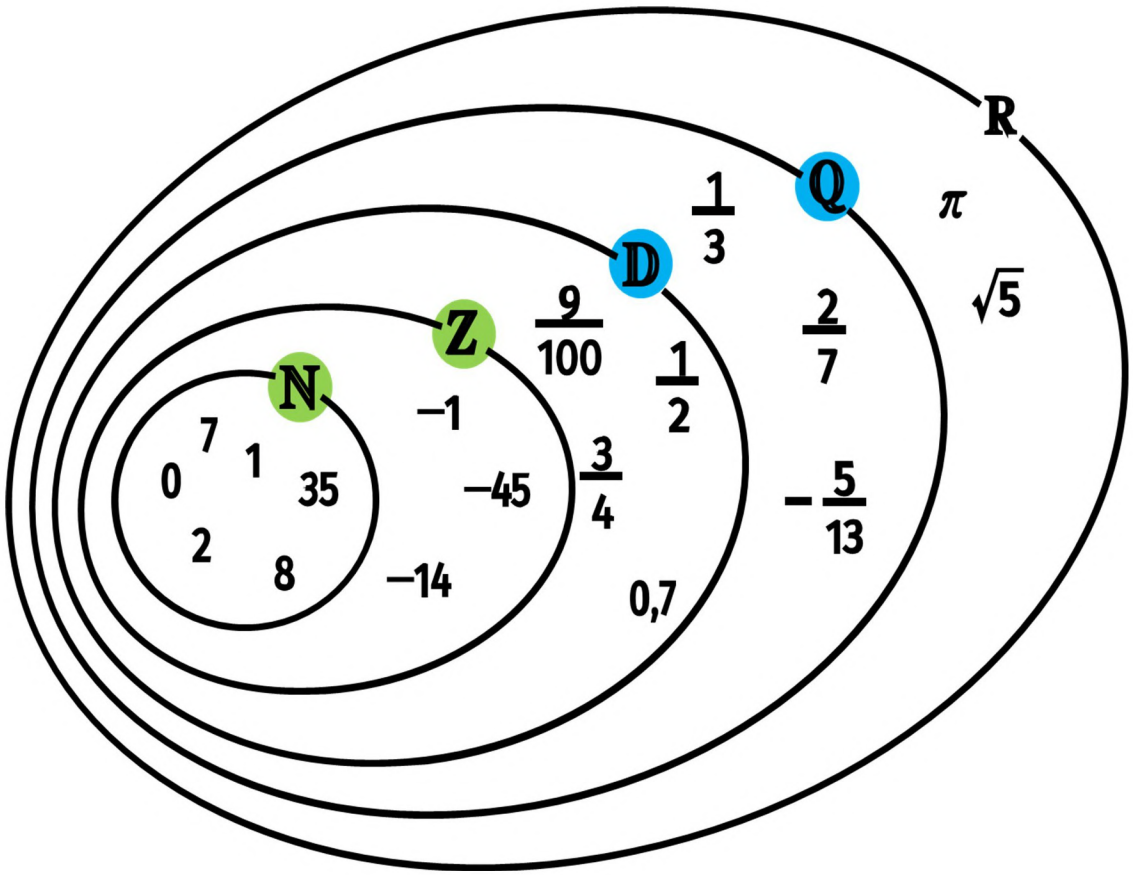
$\emptyset$ et $\{\}$ sont des symboles pour signifier qu'il n'y a pas de réponse, que l'ensemble de réponse est vide.

Élément de « $\in$ » ou n'est pas élément de « $\notin$ »



permet d'écrire : $-45 \in \mathbb{Z}$ $-45 \notin \mathbb{N}$

-45 appartient à l'ensemble $\mathbb{Z}$, mais n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{N}$.



L'addition

Quand les signes sont positifs

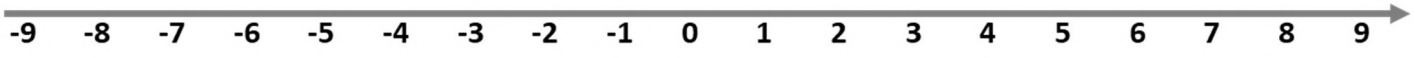
$$7 + 11 = 18$$

Quand les signes sont négatifs

$$-4 + -5 = -9$$

Quand les signes sont contraires

$$-6 + 3 = -3$$



Sans tenir compte du signe, je soustrais le plus éloigné de 0 par le moins éloigné de 0.

On donne le signe du plus éloigné de 0 à la somme, la réponse.

L'opposé d'un nombre

-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6

Si on additionne deux nombres opposés on obtient 0. -9 + 9 = 0

L'opposé de l'opposé d'un nombre

-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6

Ainsi -(-(-(-(-9) = -9

La soustraction

Pour soustraire des nombres entiers, on choisit souvent de transformer la soustraction en addition.

Oui, oui, vous avez bien entendu.

Ainsi

$$11 - 23 = 11 + -23$$
$$11 - -23 = 11 + 23$$

De même

$$-11 - 23 = -11 + -23$$
$$-11 - -23 = -11 + 23$$

On a plus qu'à effectuer l'addition.

Explication

Si je me soustrais d'une dette, c'est enlever ma dette, je n'ai plus de dette.

Donc, si j'ai une dette de 400$, c'est que j'ai -400$ au solde de mes économies.

Si je soustrais -400$ de mon solde, c'est comme si j'avais ajouté 400$ au solde de mes économies.

Ainsi -400 - -400 = -400 + 400

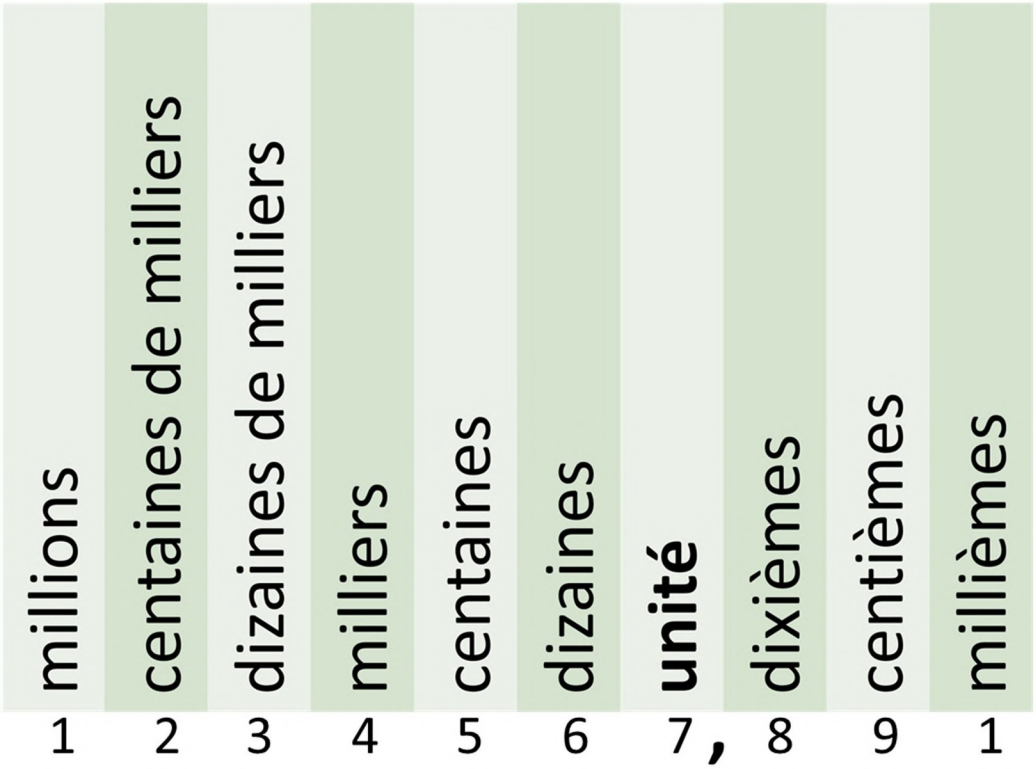
L’arrondissement

Arrondir, selon le contexte avec la précision nécessaire et suffisante.

La population de Sherbrooke en 2022 est de 170 816 personnes. Dans la moindre des conversations, j’utiliserais 170 000 personnes et d’aucuns ne m’en tiendraient rigueur. Parce que la précision est suffisante pour la grande majorité des conversations. Je pourrais être un peu plus précis et je dirais 171 000 personnes.

Donc, arrondir nous fait perdre de la précision, mais pas suffisamment pour se le reprocher.

Tout d’abord je dois connaître la position des chiffres dans un nombre.



1 2 3 4 5 6 7 , 8 9 1

Je commence par choisir la position à laquelle je désire arrondir le nombre.
Ici, on va arrondir aux dizaines.

Donc, j'avais 1 234 567, 891
j'aurai 1 234 570

Que s'est-il passé ?

1 2 3 4 5 6 7 , 8 9 1

Je désire arrondir un nombre aux centièmes.

Donc, j'avais 1 234 567, 891
j'aurai 1 234 567, 89

Si j'avais 1 234 567, 896
j'aurai 1 234 567, 9

Que s'est-il passé ?

Je repère la position à laquelle je désir arrondir, puis je regarde le chiffre à sa droite.

Si celui-ci est 5, 6, 7, 8 ou 9 j'augmenterai de 1 la position choisit. Sinon je passe à l'étape suivante.

Remplacer tous les chiffres après la position, jusqu'à la virgule, par des 0.

1 234 567, 896 arrondit aux milliers
donne 1 235 000

1 234 567, 896 arrondit aux centaines de milliers
donne 1 200 000

1 299 967, 896 arrondit aux centaines
donne 1 300 000

Que s'est-il passé ?

L'estimation

L'estimation est une façon d'effectuer des calculs, souvent mentalement.

Par exemple je veux multiplier

$$32 \times 67 =$$

$$30 \times 70 = 2100$$

2100 est une bonne estimation du résultat, le résultat plus précis étant 2144.

La multiplication et la division

Pour ces deux opérations sur les nombres entiers on devra retenir que hormis la gestion des signes, ces opérations s'effectuent de la même manière que lorsque nous nous trouvons en face de nombres naturels.

Donc, si j'ai $15 \times 4 = 60$ rien de changé, mais si j'ai $15 \times -4 = -60$ on remarquera que le signe de la réponse est négatif.

positif x positif	positif
positif x négatif	négatif
négatif x positif	négatif
négatif x négatif	positif

positif ÷ positif	positif
positif ÷ négatif	négatif
négatif ÷ positif	négatif
négatif ÷ négatif	positif

Pour s'en souvenir :

Quand les 2 termes ont le même signe la réponse est positive.

Quand les 2 termes ont des signes différents la réponse est négative.

L'exponentiation

Pour simplifier l'écriture de la multiplication d'un facteur par lui-même plusieurs fois, on utilise un exposant.

Ainsi, $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

Cependant, certaines subtilités apparaissent lors de la présence de facteurs négatifs.

$(-3)^2 = 9$ car $-3 \times -3 = 9$

$(-3)^3 = -27$ car $-3 \times -3 \times -3 = -27$

$(-3)^5 = -243$

PEMDAS ou PEDMAS

P	parentaise
E	exposant
MD	multiplication ou division à partir de la gauche vers la droite, dans l'ordre d'apparition.
AS	Addition ou soustraction à partir de la gauche vers la droite, dans l'ordre d'apparition.

Pour effectuer une chaine d'opération, il est essentiel de respecter la priorité des opérations et idéalement la même que tout le monde.

$$4 \times (56 + 16 \times 112) - 297 \div 3^3 =$$

Commutativité

Celle que vous connaissez sans le savoir.

Avez-vous déjà changé l'ordre des termes dans une addition, ou l'ordre des facteurs dans une multiplication ?

Le résultat est le même !

$$6 + 5 + 2 = 2 + 6 + 5 = 5 + 2 + 6 = 13$$

$$6 \times 5 \times 2 = 2 \times 6 \times 5 = 5 \times 2 \times 6 = 60$$

Ça, ça s'appelle la commutativité !

Associativité

Découle de la commutativité

$$4 + (56 + 16) = (4 + 56) + 16 = 76$$

$$4 \times (56 \times 16) = (4 \times 56) \times 16 = 3584$$

$$4 \times (-56 \times 16) = (4 \times -56) \times 16 = -3584$$

Ceci peut représenter une bonne idée* de transformer une soustraction en addition, puisque la commutativité et l'associativité ne sont pas des propriétés de la soustraction, ni de la division.

Distributivité

Super utile pour manipuler des équations*.

Il y a la distributivité de la multiplication sur l'addition

$$4 \times (56 + 16) = 4 \times 56 + 4 \times 16$$

Il y a la distributivité de la multiplication sur la soustraction

$$4 \times (56 - 16) = 4 \times 56 - 4 \times 16$$

Élément neutre et élément absorbant

Par élément neutre, on entend une opération qui ne change pas le résultat, peu importe le nombre de fois qu'on l'effectue.

Dans l'addition, additionner 0 ne change rien, alors 0 est l'élément neutre de l'addition.

Dans la multiplication, multiplier par 1 ne change rien, alors 1 est l'élément neutre de la multiplication.

Maintenant, un élément absorbant de la multiplication : 0 , quand je multiplie par 0, il ne reste plus rien.

Les multiples

En multipliant un nombre par chacun des éléments de l'ensemble $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots\}$ on obtient l'ensemble des multiples de ce nombre,

ainsi « 3 » donne les multiples suivant :

$\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \cdots\}$

Les diviseurs ou les facteurs

Un nombre entier qui divise un autre nombre entier tout en donnant une réponse entière est appelé un diviseur de ce nombre.

ainsi « 3 » est un diviseur de 18 puisque :

$$18 \div 3 = 6$$

Ce qui nous donne pour l'ensemble des diviseurs de 18 : $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Les nombres composés

Un nombre est composé s'il n'est pas premier.

Les facteurs premiers

Les facteurs premiers

Les critères de divisibilité

1	Tout nombre se divise par 1.
2	Tout nombre pair se divise par 2.
3	Si la somme de ses chiffres se divise par 3.
4	Si le nombre formé des 2 derniers chiffres se divisent par 4.
5	S'il se termine par 0 ou 5
6	S'il est pair et qu'il se divise par 3
8	Si le nombre formé des 3 derniers chiffres se divisent par 8.
9	Si la somme de ses chiffres se divise par 9.
10	S'il se termine par 0

Le PGCD et le PPCM

En utilisant la décomposition en facteurs premiers

PGCD et PPCM sont des abréviations.

PGCD pour plus grand commun diviseur de deux nombres ou plus.

Le PGCD s'avère être un excellent outil pour effectuer des distributions complexes.

Par exemple, vous avez différents items en stocks et vous aimeriez distribuer à un maximum de personnes, tout en respectant que chacun ait le même nombre d'unités de chaque item. Dans, ces conditions, le PGCD sera votre solution.

PPCM pour plus petit commun multiple entre deux nombres ou plus.

Le PPCM est surtout utile pour trouver un dénominateur commun dans les situations où mentalement c'est difficile d'y arriver. Il permet aussi de résoudre des situations, où des cycles doivent coïncider.

Trouvons le PGCD, ainsi que le PPCM de 36 et 72

Ce qui veut dire trouver la valeur de

PGCD (36, 72) = **PPCM (36, 72) =**

36 72

PGCD

Quand je regarde le résultat de mes deux décompositions en facteurs premiers, je prends les facteurs qui se retrouvent dans chacune des décompositions pour fabriquer mon PGCD

PPCM

Quand je regarde le résultat de mes deux décompositions en facteurs premiers, je prends les facteurs qui se retrouvent dans chacune des décompositions pour fabriquer mon PPCM et j'ajoute ce qui n'est pas pareil.

Autrement dit, si les nombres se retrouvent dans chacune des décompositions, je les utilise qu'une seule fois (ou le même nombre de fois s'il y a des paires ou même des triplets dans chacune des décompositions en facteurs premiers. Puis, j'ajoute les nombres qui se retrouvaient dans l'une des décompositions seulement.

Dans les deux cas, je multiplie ensemble chacun des facteurs premiers sélectionnés pour obtenir le PPCM

120 42 91

Le PGCD

Ce à quoi il peut être bien utile

Un bouquet

Anthony est fleuriste. Il crée un bouquet de fleurs expressément pour la Saint-Valentin, qui sera vendu 45 $ l'unité. Pour faire les bouquets, il commande 168 lys, 336 marguerites, 420 tulipes et 504 roses.

Chaque fleur est vendue par le fournisseur au prix indiqué dans le tableau.

Fleur	Prix unitaire ($)
Lys	1
Marguerite	1
Tulipe	2
Rose	3

Sachant que toutes les fleurs commandées seront utilisées. Que tous les bouquets sont identiques. Combien lui restera-t-il d'argent, après avoir payé ses fleurs au fournisseur et vendu tous ces bouquets de fleurs.

Les bonbons d'Halloween

Maxime a acheté les quantités indiquées au côté des bonbons.

Maintenant, il faut savoir combien de bonbons il y aura dans chaque sac et combien nous aurons de sacs en tout.

Il est interdit de manger des bonbons pour faire arriver vos calculs.

Ah!, l'une des joies de l'Halloween, c'est de remettre des bonbons aux petits enfants du quartier.

Mais comme l'année dernière certains ont remarqué que dans les sacs que nous avions préparés, il n'y avait pas la même quantité de bonbons.

Chicane entre frère et sœur, on fut accusé de favoritisme. Enfin, assez pour ne plus avoir envie de remettre de bonbons.

Mais, c'est une tradition dans la famille, nos sacs sont même facilement reconnaissables. Alors, il faut trouver une solution pour que le bonheur soit parfait.

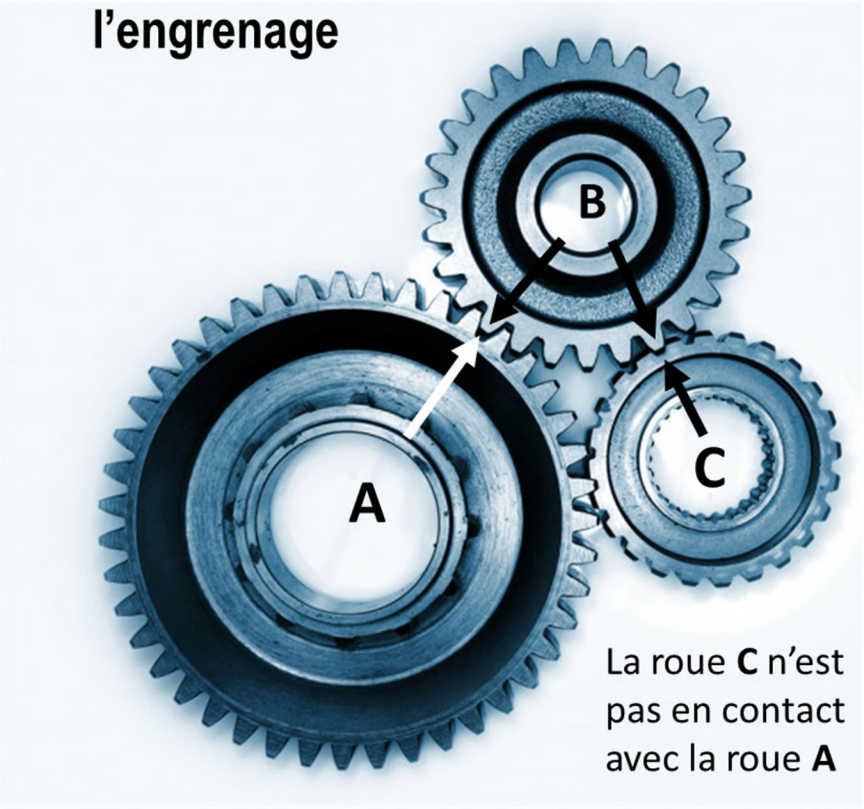
Le PPCM

Ce à quoi il peut être bien utile

Veux-tu sortir avec moi?

Siméon et Juliette sont possiblement de futur amoureux. Siméon n'a pas encore fait sa demande et Juliette ne dirait pas non. Seulement, durant les vacances d'été ils passent au même endroit à des fréquences différentes. Siméon retourne à cet endroit tous les 6 jours et Juliette tous les 10 jours. Il se sont rencontré aujourd'hui, mais ils n'ont pas eu le courage de s'avouer quoique ce soi. Dans combien de jours auront-ils une nouvelle chance?

Un mécanicien pris dans l'engrenage



La roue **C** n'est pas en contact avec la roue **A**

Un mécanicien qui a oublié ses leçons de mathématiques de secondaire 1 vous demande votre aide.

Il doit trouver après combien de tours de la grande roue d'engrenage, les flèches se rencontreront à nouveau.

Sachant que la grande roue **A** a 27 dents et que la moyenne **B** en a 18.

Sans cette information, il sera incapable de synchroniser adéquatement son outil.

Quand tu auras réussi pourrais-tu l'aider avec un autre jeu d'engrenage, soit l'un de 44 dents pour la roue **A** et l'autre de 27 dents pour la **B**.

Problèmes

Il arrive parfois dans la vie, où l'on prend une mauvaise décision, que celle-ci devienne un véritable enfer.

Bien que l'on m'est déconseiller d'emprunter de l'argent à des personnes peu recommandable, … et bien, je l'ai fait … seulement, j'ai emprunté beaucoup plus que je n'aurais du et ces gars, pas très commodes, aimeraient que je les paie tous en même temps. J'ai mis en dessous des photos, le montant du à chaque gars.

294 $ 343 $ 427 $ 581 $ 525 $

En combien de paiements égaux puis-je les rembourser tous ?

Et quels seraient les montants de ces remboursements pour chacun, supposant que je fais un paiement chaque semaine ?

Chaine d'opération

$$3 \times -2 + (8^2 - -4) \div 2 =$$

P	parentaise
E	exposant
MD	multiplication ou division à partir de la gauche vers la droite, dans l'ordre d'apparition.
AS	Addition ou soustraction à partir de la gauche vers la droite, dans l'ordre d'apparition.

1 x 1 = 1	2 x 1 = 2	3 x 1 = 3	4 x 1 = 4	5 x 1 = 5	6 x 1 = 6
1 x 2 = 2	2 x 2 = 4	3 x 2 = 6	4 x 2 = 8	5 x 2 = 10	6 x 2 = 12
1 x 3 = 3	2 x 3 = 6	3 x 3 = 9	4 x 3 = 12	5 x 3 = 15	6 x 3 = 18
1 x 4 = 4	2 x 4 = 8	3 x 4 = 12	4 x 4 = 16	5 x 4 = 20	6 x 4 = 24
1 x 5 = 5	2 x 5 = 10	3 x 5 = 15	4 x 5 = 20	5 x 5 = 25	6 x 5 = 30
1 x 6 = 6	2 x 6 = 12	3 x 6 = 18	4 x 6 = 24	5 x 6 = 30	6 x 6 = 36
1 x 7 = 7	2 x 7 = 14	3 x 7 = 21	4 x 7 = 28	5 x 7 = 35	6 x 7 = 42
1 x 8 = 8	2 x 8 = 16	3 x 8 = 24	4 x 8 = 32	5 x 8 = 40	6 x 8 = 48
1 x 9 = 9	2 x 9 = 18	3 x 9 = 27	4 x 9 = 36	5 x 9 = 45	6 x 9 = 54
1 x 10 = 10	2 x 10 = 20	3 x 10 = 30	4 x 10 = 40	5 x 10 = 50	6 x 10 = 60
1 x 11 = 11	2 x 11 = 22	3 x 11 = 33	4 x 11 = 44	5 x 11 = 55	6 x 11 = 66
1 x 12 = 12	2 x 12 = 24	3 x 12 = 36	4 x 12 = 48	5 x 12 = 60	6 x 12 = 72

7 x 1 = 7	8 x 1 = 8	9 x 1 = 9	10 x 1 = 10	11 x 1 = 11	12 x 1 = 12
7 x 2 = 14	8 x 2 = 16	9 x 2 = 18	10 x 2 = 20	11 x 2 = 22	12 x 2 = 24
7 x 3 = 21	8 x 3 = 24	9 x 3 = 27	10 x 3 = 30	11 x 3 = 33	12 x 3 = 36
7 x 4 = 28	8 x 4 = 32	9 x 4 = 36	10 x 4 = 40	11 x 4 = 44	12 x 4 = 48
7 x 5 = 35	8 x 5 = 40	9 x 5 = 45	10 x 5 = 50	11 x 5 = 55	12 x 5 = 60
7 x 6 = 42	8 x 6 = 48	9 x 6 = 54	10 x 6 = 60	11 x 6 = 66	12 x 6 = 72
7 x 7 = 49	8 x 7 = 56	9 x 7 = 63	10 x 7 = 70	11 x 7 = 77	12 x 7 = 84
7 x 8 = 56	8 x 8 = 64	9 x 8 = 72	10 x 8 = 80	11 x 8 = 88	12 x 8 = 96
7 x 9 = 63	8 x 9 = 72	9 x 9 = 81	10 x 9 = 90	11 x 9 = 99	12 x 9 = 108
7 x 10 = 70	8 x 10 = 80	9 x 10 = 90	10 x 10 = 100	11 x 10 = 110	12 x 10 = 120
7 x 11 = 77	8 x 11 = 88	9 x 11 = 99	10 x 11 = 110	11 x 11 = 121	12 x 11 = 132
7 x 12 = 84	8 x 12 = 96	9 x 12 = 108	10 x 12 = 120	11 x 12 = 132	12 x 12 = 144

-46	-45	-44	-43	-42	-41	-40	-39	-38	-37	-36	-35	-34	-33	-32

-31	-30	-29	-28	-27	-26	-25	-24	-23	-22	-21	-20	-19	-18	-17	-16

-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46